Υποψήφιες ερωτήσεις προφορικών εξετάσεων, «Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι», Αναλυτικότητα Μιγαδικών Συναρτήσεων

Δήμογλου Κωνσταντίνος

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Ερώτηση 1. Σωστό ή Λάθος;

(a) Αν για μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $z_n \to 0$ τότε η σειρά της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

(b) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ αποκλίνει.

(c) Αν μια σειρά μιγαδικών αριθμών συγκλινει, τότε συγκλινει και απόλυτα.

Ερώτηση 2. Ποια 4 κριτήρια σύγκλισης σειρών μιγαδικών αριθμών γνωρίζετε; Διατυπώστε τα.

Ερώτηση 3. Πότε λέμε πως μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση f και πότε ομοιόμορφα; Αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ μία ακολουθία η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση f, τότε συγκλίνει και ομοιόμορφα; Αν όχι, έχετε κάποιο κατάλληλο αντιπαράδειγμα; Πότε λέμε ότι μια σειρά συναρτήσεων $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο σε μία συνάρτηση f και πότε ομοιόμορφα;

Ερώτηση 4. Να διατυπώσετε το Κριτήριο του Cauchy για τη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων και το Κριτήριο του Weierstrass για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων. Με χρήση του Κριτηρίου του Weierstrass να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2\sqrt{n+2}}$$

συγκλινει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,1)$. Αν $f_n, f\colon D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $n\in\mathbb{N}_0$ και a σημείο συσσώρευσης του D κάτω από ποια υπόθεση σύγκλισης (ομοιόμορφη ή κατά σημείο) της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ προς την f, ισχύει ότι

$$\lim_n \lim_{z\to a} f_n(z) = \lim_{z\to a}\lim_n f_n(z)\ ;$$

Με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο a τι μπορύμε να συμπεράνουμε για το ομοιόμορφο όριο της;

Ερώτηση 5.

Αν μια δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ συγκλινει για κάποιο $z_0\in\mathbb{C}$ με $z_0\neq a$, μπορούμε να αποφανθούμε σύγκλιση αυτής και τοπικά σε ένα δίσκο με κέντρο z_0; Αν ναι, τότε τι ακτίνας είναι αυτός ο δίσκος σύγκλισης; Μπορούμε να δηλώσουμε κάτι περι ομοιόμορφης σύγκλισης της δυναμοσειράς; Να ορίσετε την ακτίνα σύγκλισης τυχούσας δυναμοσειράς και να διατυπώσετε το Θεώρημα των Cauchy-Hadamard για τη συμπεριφορά της σύγκλισης μιας δυναμοσειράς για κατάλληλες τιμές της ακτίνας σύγκλισης. Γνωρίζεται άλλες εκφράσεις για την ακτίνα σύγκλισης μίας δυναμοσειράς εκτός του ορισμού; Πως θα κάνατε τη μελέτη σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^2\ 3^n}$;

Ερώτηση 6.

Διατυπώστε το Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών και δώστε τον τύπο της παραγώγου μίας συγκλινουσας δυναμοσειράς. Ποια η σχέση της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς με της παραγώγου της; Μπορεί μια δυναμοσειρά να είναι άπειρες φορές μιγαδικά διαφορίσιμη (αντίστοιχα άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη); Υπάρχει κάποια κλειστή μορφή περιγραφής της ακολουθίας συντελεστών μιας δυναμοσειράς; Το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε δυναμοσειρά αν υπάρχει είναι μοναδικό; Περιγραφικά να αναφέρετε γιατί το όριο μιας δυναμοσειράς σαν (μιγαδική) συνάρτηση είναι C^1 στον δίσκο σύγκλισης της.

Ερώτηση 7.

Πως ορίζονται οι συναρτήσεις $\cos z, \sin z, \tan z, \cot z$ και πώς οι αντίστοιχες υπερβολικές; Ποιο το πεδίο ορισμού τους; Είναι παντού $\mathbb{C}$ −διαφορίσιμες; Ποια η μιγαδική παράγωγος αυτών; Μπορούμε τη συνάρτηση e^z να την ορίσουμε ως το όριο κάποιας δυναμοσειράς; Αν ναι, τότε ποια αυτή; Ποιό το ανάπτυγμα της e^z γύρω από το σημείο $a_0 = 2\pi i$; Να βρείτε το ανάπτυγμα των συναρτήσεων $\sinh z$ και $\cosh z$, αντίστοιχα γύρω από το σημείο $a_1 = 0$.

Ερώτηση 8.

Πότε μία συνάρτηση $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, όπου D ανοιχτό στο $\mathbb{C}$ λέγεται αναλυτική; Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική είναι και ολόμορφη; Αν η f είναι αναλυστική τότε είναι και άπειρες φορές συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της; Υπάρχει κάποιο θεώρημα που να μας το εξασφαλίζει; Οι σύναρτήσεις $e^z, \cos z, \sin z$ και $P(z)$, όπου $P(z)$ ένα πολυώνυμο m βαθμού είναι αναλυτικές; Επίσης, που η συνάρτηση $\dfrac{1}{a-z}$ για $z \neq a \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική;